

Soluție

1.a) Se dezvoltă determinantul; se obține $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

b) $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 \Rightarrow \det A \cdot \det(A^*) = (\det A)^3 \Rightarrow \det A \cdot \det(A^*) = (\det A)^3$.

Cum $\det A \neq 0 \Rightarrow \det(A^*) = (\det A)^2$.

c) Avem $A - I_3 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$ și se observă că orice minor de ordin 2 al matricei A este nul. Ca urmare,

rangul matricei $A - I_3$ este cel mult 1.

2.a) Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow x = y$, adică f este injectivă.

Pentru orice $y \in G$, considerând $x = a^{-1}y \in G$, rezultă $f(x) = y$, deci f este surjectivă.

b) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a \cdot f_b(x) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x), \forall x \in G$.

c) Compunerea funcțiilor este asociativă. Elementul neutru este $1_G = f_e \in \mathcal{F}(G)$, unde e este elementul neutru din G . Dacă a^{-1} este simetricul lui $a \in G$, atunci $f_{a^{-1}}$ este simetricul elementului $f_a \in \mathcal{F}(G)$.